

Каждая правильно решенная задача оценивается в 10 баллов.

Физика 8 класс, вариант 1

1. В пустое тонкостенное ведёрко, которое плавает в воде, погрузившись на $2/3$ своего объёма, начинают медленно наливать воду. В момент, когда в него было налито 100 мл воды, ведёрко утонуло. Чему равна масса ведёрка? Плотность воды $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$.

Решение.

Пусть m и V — масса и объём ведёрка, соответственно, $V_{\text{вод}}$ — объём налитой воды. В равновесии выталкивающая сила Архимеда уравнивает силу тяжести:

$$\frac{2}{3}V\rho g = mg, \quad (1) \quad (3 \text{ б.})$$

где g — ускорение свободного падения. После добавления воды массой $m_{\text{вод}} = V_{\text{вод}}\rho$ равенство сил принимает вид:

$$V\rho g = mg + V_{\text{вод}}\rho g. \quad (2) \quad (3 \text{ б.})$$

Умножив (1) на $3/2$ и вычитая (2), и выражая искомую массу ведёрка, получим

$$m = 2V_{\text{вод}}\rho. \quad (2 \text{ б.})$$

Подставив сюда численные значения, получим

$$\text{ответ: } 0,2 \text{ кг.} \quad (2 \text{ б.})$$

2. Житель новосибирского Академгородка каждый день ездит на работу в центр Новосибирска и затрачивает на дорогу 1 час. В понедельник, проехав $1/3$ пути, он заметил горящую лампочку, сигнализирующую о заканчивающемся бензине в бензобаке. Решив заправиться на АЗС, находящейся на $2/3$ пути, и предположив, что на заправку ему потребуется 5 минут, он поехал быстрее так, чтобы вовремя успеть на работу. Из-за очереди на АЗС, на заправку ушло 10 минут, и водителю, чтобы приехать на работу вовремя, пришлось поехать ещё быстрее. Во сколько раз автомобиль на последнем участке пути двигался быстрее, чем в начале пути? Автомобиль на всех участках двигался равномерно, временем ускорения и торможения пренебречь.

Решение.

Дорога на работу занимает $T = 60$ мин. Пусть скорость на первом участке пути равна u_1 . Тогда длина пути равна $u_1 T$, а скорость u_2 на втором участке определяется уравнением

$$T = \frac{1}{3}T + \frac{2}{3} \frac{u_1 T}{u_2} + \Delta t, \quad (1) \quad (3 \text{ б.})$$

где Δt — планируемое время заправки. Скорость u_3 на третьем участке определяется уравнением:

$$T = \frac{1}{3}T + \frac{1}{3} \frac{u_1 T}{u_2} + \frac{1}{3} \frac{u_1 T}{u_3} + \Delta t', \quad (2) \quad (3 \text{ б.})$$

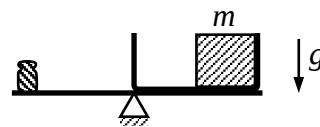
где $\Delta t'$ — фактическое время заправки. Вычтем (1) из (2), умноженного на 2, и выразив u_3/u_1 , получим:

$$\frac{u_3}{u_1} = \frac{T}{T - 3\Delta t' + \frac{3}{2}\Delta t}. \quad (2 \text{ б.})$$

Подставив сюда численные значения, получим

$$\text{Ответ: } u_3/u_1 = 8/5. \quad (2 \text{ б.})$$

3. На левой чаше уравновешенных рычажных весов лежит гири, а на правой — прямоугольная коробка, правая половина которой полностью заполнена льдом массы m . Левый край коробки расположен прямо над точкой опоры рычага весов (см. рис.). Весы удерживают, и в коробку добавляют ещё кусочек льда. Определите массу этого кусочка льда, если известно, что после того, как лёд растаял весы оказались в равновесии.



Решение.

Пусть M — масса гири, l — длина плеча рычага весов. На рычаг весов с одной стороны действует вес гири Mg , приложенный к левому концу рычага, и вес льда mg , приложенный к точке, удалённой на $3l/4$ вправо от точки опоры. Условие равновесия весов выражается равенством моментов этих сил и имеет вид:

$$Mgl = mg \cdot \frac{3}{4}l, \quad (1) \quad (4 \text{ б.})$$

где g — ускорение свободного падения. После того, как в коробку добавили лёд массой Δm и подождали, пока весь лёд растает, весы снова оказываются в равновесии. При этом вес воды приложен к середине правого плеча рычага, а условие равновесия весов имеет вид:

$$Mgl = (m + \Delta m)g \cdot \frac{1}{2}l. \quad (2) \quad (4 \text{ б.})$$

Вычтя (1) из (2), и выразив искомую массу Δm , получим

$$\text{ответ: } \Delta m = m/2. \quad (2 \text{ б.})$$

4. В двух одинаковых теплоизолированных пробирках находится одинаковое количество жидкости при неизвестной, но одинаковой температуре. Эту температуру измеряют термометром с неизвестной теплоёмкостью, который первоначально показывает комнатную температуру T_0 . Его опускают сначала в первую пробирку — и он показывает температуру T_1 , а затем быстро переключают во вторую пробирку, где он показывает температуру T_2 . Какую температуру имела жидкость перед измерениями? Во всех случаях показания термометра снимают после наступления теплового равновесия.

Решение.

Пусть c_t — теплоёмкость термометра, $c_{\text{ж}}$ — теплоёмкость жидкости в пробирке, T — искомая температура жидкости. При погружении термометра в первую жидкость, часть тепловой энергии перераспределится между жидкостью и термометром, и они окажутся при одной температуре T_1 . Запишем уравнение теплового баланса для этого процесса:

$$c_t (T_1 - T_0) = c_{\text{ж}} (T_1 - T). \quad (1) \quad (4 \text{ б.})$$

Затем, термометр, имеющий температуру T_1 , погружают во вторую жидкость. Аналогичное уравнение теплового баланса имеет вид:

$$c_t (T_2 - T_1) = c_{\text{ж}} (T_2 - T). \quad (2) \quad (4 \text{ б.})$$

Разделив (1) на (2) и выразив искомую температуру T , получим

$$\text{ответ: } T = \frac{T_1^2 - T_0 T_2}{2T_1 - T_0 - T_2}. \quad (2 \text{ б.})$$

Физика 9 класс, вариант 1

1. Первый автомобиль, двигаясь по дороге с постоянной скоростью v , проезжает мимо второго неподвижно стоящего у дороги автомобиля. В этот момент второй автомобиль начинает двигаться с постоянным ускорением a , и после достижения скорости v перестаёт ускоряться, и продолжает движение с постоянной скоростью. Через некоторое время после этого первый автомобиль подъезжает к перекрёстку к моменту включения зелёного света светофора и проезжает перекрёсток без остановки. Как долго должен гореть зелёный свет светофора, чтобы второй автомобиль тоже успел проехать перекрёсток без остановки?

Решение.

Второй автомобиль достиг скорости v за время $t = v/a$. (2 б.)

За это время расстояние между автомобилями стало равно $l = v \cdot t - at^2/2 = v^2/2a$. Тогда время, необходимое второму автомобилю для того, чтобы доехать до перекрёстка равно

$$T = l/v = v/2a. \quad (6 \text{ б.})$$

Следовательно, светофор должен гореть не меньше этого времени T .

$$\text{Ответ: } T \geq v/2a. \quad (2 \text{ б.})$$

2. Катер сначала проплыл вдоль берега реки, затратив на путь $L = 16$ км время $t_1 = 1$ час. Затем он пересёк реку по кратчайшей траектории, перпендикулярной берегам, затратив на это время $t_2 = 7,5$ мин. Определите скорость течения реки (в км/ч). Ширина реки $H = 2,5$ км.

Решение.

Скорость катера вдоль реки относительно берега равна $v_1 = L/t_1 = 16$ км/ч. Скорость катера относительно берега, когда он плыл перпендикулярно реке равна $v_2 = H/t_2 = 20$ км/ч. Так как скорость катера $v_1 < v_2$, то это означает, что вдоль реки катер плыл против течения. **(1 б.)**

Пусть скорость течения реки $\mathbf{u}$, а скорость катера относительно реки $\mathbf{v}$. Тогда скорость катера относительно берега в векторном виде равна $\mathbf{v} + \mathbf{u}$. При движении против течения эта скорость

$$v_1 = v - u. \quad (1) \quad \textbf{(2 б.)}$$

При движении перпендикулярно берегам ($\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{v}_2 \perp \mathbf{u}$), скорость v_2 можно найти с помощью теоремы Пифагора

$$v^2 = v_2^2 + u^2. \quad (2) \quad \textbf{(3 б.)}$$

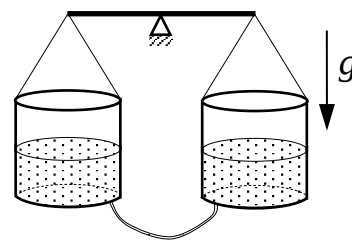
Выразив v из (1) и подставив в (2), найдём

$$u = \frac{1}{2} \left(\frac{v_2^2}{v_1} - v_1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{H^2 t_1}{L t_2^2} - \frac{L}{t_1} \right). \quad \textbf{(2 б.)}$$

Подставив численные значения, получим

$$\textbf{Ответ: } u = 4,5 \text{ км/ч.} \quad \textbf{(2 б.)}$$

3. На двух чашах рычажных весов на одной высоте находятся в равновесии два одинаковых сообщающихся сосуда, соединенных тонкой гибкой трубочкой. В сосуды налита вода и они уравновешены. В левый сосуд положили алюминиевый брусок массы m . Какую массу должен иметь медный брусок, положенный в правый сосуд, чтобы система осталась в равновесии при исходном положении сосудов? Плотность алюминия ρ_1 , меди — ρ_2 , а воды — ρ .



Решение.

Объём алюминиевого бруска равен $V_1 = m/\rho_1$, а медного — $V_2 = m_x/\rho_1$, где m_x — искомая масса медного бруска. (1 б.)

Так как и медь и алюминий тяжелее воды, то оба металлических бруска опустятся на дно. Уровень воды в сообщающихся сосудах должен быть одинаковым, значит половина от разницы вытесненных объёмов воды $\Delta V = (V_1 - V_2)/2$ перетечёт из левого в правый сосуд. (3 б.)

После этого, масса воды в правом сосуде станет больше чем масса воды в левом сосуде на $2 \cdot \rho \Delta V$. Чтобы весы оставались в равновесии массы правой и левой чаши рычажных весов должны быть одинаковы: $m = 2 \cdot \rho \Delta V + m_x$. (4 б.)

Подставив сюда выражения для объёмов и решив уравнение относительно m_x , найдём

$$\text{Ответ: } m_x = \frac{1 - \rho/\rho_1}{1 - \rho/\rho_2} m. \quad (2 \text{ б.})$$

Примечание: Задачу можно решить проще, сообразив, что условие равновесия сводится к равенству весов металлических брусков в сосудах с учётом действующих на них силы тяжести и

силы Архимеда: $mg - \rho \frac{m}{\rho_1} g = m_x g - \rho \frac{m_x}{\rho_2} g$.

4. Для того, чтобы измерить температуру жидкости в химическом реакторе, небольшое её количество отлили в теплоизолированный пробоотборник, который обладает некоторой теплоёмкостью. Затем половину содержимого пробоотборника перелили в другой такой же прибор. Измерения температуры жидкости показали T_1 в первом пробоотборнике, и T_2 во втором. Первоначально пробоотборники имели комнатную температуру T_0 . Определите температуру жидкости в реакторе.

Решение.

Пусть $c_{\text{п}}$ — теплоёмкость пробоотборника, $c_{\text{ж}}$ — теплоёмкость жидкости, перелитой в первый пробоотборник, T — искомая температура жидкости. Когда отлили жидкость в первый пробоотборник, часть тепловой энергии перераспределилась между жидкостью и пробоотборником, и они оказались при одной температуре T_1 . Запишем уравнение теплового баланса для этого процесса:

$$c_{\text{п}}(T_1 - T_0) = c_{\text{ж}}(T - T_1). \quad (1) \quad (4 \text{ б.})$$

Теплоёмкость вещества пропорциональна его массе, поэтому у половины жидкости теплоёмкость в 2 раза меньше. Запишем аналогичное уравнение теплового баланса, после того, как половину жидкости перелили во второй пробоотборник:

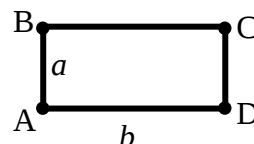
$$c_{\text{п}}(T_2 - T_0) = \frac{c_{\text{ж}}}{2}(T_1 - T_2). \quad (2) \quad (4 \text{ б.})$$

Разделив (1) на (2) и выразив искомую температуру T , получим

$$\text{ответ: } T = T_1 + \frac{1}{2} \frac{(T_1 - T_2)(T_1 - T_0)}{(T_2 - T_0)}. \quad (2 \text{ б.})$$

Физика 10 класс, вариант 1

1. Прямоугольник ABCD со сторонами a и b сделан из однородной проволоки. Во сколько раз изменится сопротивление между точками А и С, если точки В и D соединить проводом с нулевым сопротивлением?



Решение.

Сопротивление проволоки пропорционально её длине l :

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (1) \quad (2 \text{ б.})$$

где ρ — удельное сопротивление материала проволоки, S — площадь её сечения. Обозначим сопротивления, соответствующие длинам сторон через $R_a = \rho a/S$ и $R_b = \rho b/S$. Сопротивления R_a и R_b соединены последовательно, поэтому сопротивления как верхнего участка [AB-BC], так и нижнего [AD-DC] равны $R_a + R_b$.

В то же время, эти участки соединены между собой параллельно, поэтому сопротивление R_{AC} между точками А и С удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{R_{AC}} = \frac{1}{R_a + R_b} + \frac{1}{R_a + R_b}. \quad (1) \quad (3 \text{ б.})$$

После соединения точек В и D, между точками А и С окажутся два одинаковых последовательно соединенных участка [A-B(D)] и [B(D)-C], в каждом из которых окажутся параллельно соединенные куски проволоки с сопротивлениями R_a и R_b , с общим сопротивлением

$$\frac{R_a R_b}{R_a + R_b}. \quad (2 \text{ б.})$$

Поскольку куски проволоки на этих участках соединены между собой последовательно, сопротивление между точками А и С в этом случае

$$R'_{AC} = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b} + \frac{R_a R_b}{R_a + R_b}. \quad (2) \quad (1 \text{ б.})$$

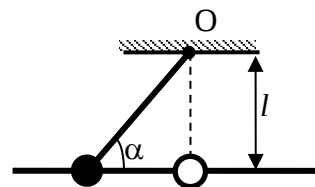
Отсюда, поделив (2) на (1), находим

$$\frac{R'_{AC}}{R_{AC}} = \frac{4R_a R_b}{(R_a + R_b)^2}.$$

С учетом выражений для R_a и R_b , получим

$$\text{ответ: } \frac{R'_{AC}}{R_{AC}} = \frac{4ab}{(a+b)^2}. \quad (2 \text{ б.})$$

2. Жёсткий закрепленный горизонтальный стержень и т. О находятся в одной вертикальной плоскости. Резиновый шнур жесткости k прикреплен одним концом к т. О, а другим — к бусинке массы m , нанизанной на стержень. Бусинку переместили так, что угол между натянутым шнуром и стержнем стал равен α и отпустили. При этом скорость бусинки в момент, когда она находилась на минимальном расстоянии l от т. О равнялась v . Чему равняется длина нерастянутого шнура l_0 , если известно, что $l_0 > l$? Трением бусинки о стержень пренебречь.



Решение.

Длина натянутого шнура равна $l' = l/\sin \alpha$, и соответственно, его удлинение равно

$$\Delta l = l' - l_0 = \frac{l}{\sin \alpha} - l_0. \quad (1) \quad (2 \text{ б.})$$

Соответствующая упругая энергия шнура равна

$$U = \frac{k \Delta l^2}{2}. \quad (2) \quad (2 \text{ б.})$$

Поскольку $l < l_0$, то в момент нахождения бусинки на минимальном расстоянии от т. О, шнур нерастянут, и его упругая энергия равна нулю. По закону сохранения энергии, вся упругая энергия шнура переходит в кинетическую энергию бусинки:

$$U = K. \quad (3) \quad (2 \text{ б.})$$

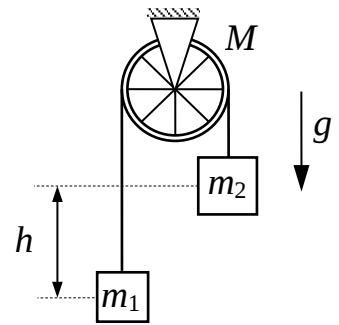
Здесь кинетическая энергия бусинки равна

$$K = \frac{mv^2}{2}. \quad (4) \quad (2 \text{ б.})$$

Подставив (2) и (4) в (3), а затем (1) в получившееся выражение, получим

$$\text{ответ: } l_0 = \frac{l}{\sin \alpha} - \sqrt{\frac{m}{k}} v. \quad (2 \text{ б.})$$

3. Через блок, сделанный из велосипедного колеса, состоящего из обода массы M и лёгких спиц, перекинута невесомая нерастяжимая верёвка. Блок может без трения вращаться вокруг неподвижной оси. К концам верёвки прикреплены два груза, первый массой m_1 , второй — m_2 ($m_2 > m_1$). В начальный момент грузы удерживают так, что второй груз находится выше первого на h . Затем грузы отпускают. Определите скорости грузов в момент, когда они окажутся на одной высоте. Ускорение свободного падения g .



Решение.

Грузы окажутся на одной высоте, когда первый поднимется, а второй опустится на высоту $h/2$. (1 б.)

При этом из-за нерастяжимости верёвки они будут иметь одинаковую скорость v . (2 б.)

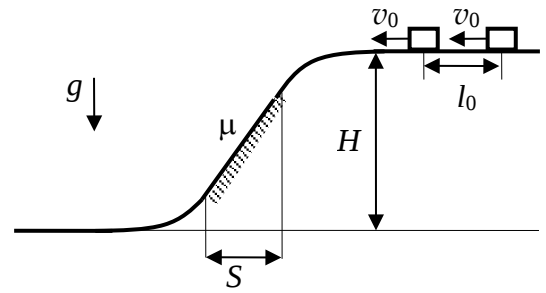
Ту же скорость будет иметь обод колеса, т.к. нет проскальзывания. Поскольку система, включающая блок и грузы, замкнута, её полная энергия, состоящая из суммы потенциальной и кинетической энергий, сохраняется:

$$\frac{m_1 v^2}{2} + \frac{m_2 v^2}{2} + \frac{M v^2}{2} + m_1 g \frac{h}{2} = m_2 g \frac{h}{2}. \quad (5 \text{ б.})$$

Выражая отсюда искомую скорость v , получим

$$\text{ответ: } v = \sqrt{\frac{gh(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + M}}. \quad (2 \text{ б.})$$

4. По горизонтальной вершине горки скользят со скоростью v_0 два маленьких одинаковых тела, находясь на расстоянии l_0 друг от друга. Они приближаются к спуску высотой H , который имеет прямой наклонный шероховатый участок, длина горизонтальной проекции которого равна S . Тела соскальзывают по склону и выходят опять на горизонтальный участок. Какое расстояние l установится между телами на нижнем горизонтальном участке, если коэффициент трения на шероховатом участке равен μ , а трением на остальных участках можно пренебречь?



Решение.

Рассмотрим движение одного из тел. На вершине горки тело обладает потенциальной энергией mgH и кинетической энергией $mv_0^2/2$. На нижнем участке потенциальная энергия тела равна нулю, а кинетическая равна $mv^2/2$, где v — его скорость. При переходе через шероховатый участок часть энергии тела тратится на работу против силы трения $F_{\text{тр}} = \mu N$, где $N = mg'$, а g' — проекция ускорения свободного падения на нормаль к наклонному участку. Поэтому, по закону сохранения энергии, изменение полной энергии тела равно работе, совершаемой телом против силы трения $F_{\text{тр}} S'$:

$$\frac{m(v_0^2 - v^2)}{2} + mgH = \mu mg'S', \quad (1) \quad (3.6.)$$

где S' — длина шероховатого участка. Заметив, что $S/S' = g'/g$ (левая и правая стороны этого соотношения равны косинусу угла наклона шероховатого участка горки), получим

$$\mu mg'S' = \mu mgS. \quad (2) \quad (2.6.)$$

Подставив (2) в (1), найдём

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2g(H - \mu S)}. \quad (3)$$

Любые две точки А и В на траектории движения тела будут пересекать с одинаковым запаздыванием Δt , т.к. время движения от А до В одинаково. На верхнем горизонтальном участке траектории $\Delta t = l_0/v_0$, а на нижнем $\Delta t = l/v$. Таким образом,

$$\frac{l_0}{v_0} = \frac{l}{v}. \quad (4) \quad (3.6.)$$

Подставив (3) в (4), найдём

$$\text{ответ: } l = l_0 \sqrt{1 + \frac{2g(H - \mu S)}{v_0^2}}. \quad (2.6.)$$

Физика 11 класс, вариант 1

1. Автобус разгоняется, отъезжая от остановки, и тормозит, подъезжая к остановке, с одинаковым ускорением. Остальное время он движется с постоянной, всегда одинаковой, скоростью. Путь S_1 между первой и второй остановкой, он преодолел за время t_1 , а путь S_2 между второй и третьей остановкой — за время t_2 . Какое время между двумя остановками автобус двигался равноускоренно?

Решение.

Пусть t — искомое время равноускоренного движения (включает разгон и торможение), а v — скорость движения после ускорения. При равноускоренном движении средняя скорость равна полусумме начальной и конечной скоростей. Поэтому, как при разгоне (начальная скорость — 0, конечная — v), так и при торможении (начальная скорость — v , конечная — 0) средняя скорость равна $v/2$. Поэтому, путь, пройденный за время разгона и торможения, равен $tv/2$, а весь пройденный путь между остановками:

$$s_1 = \frac{v}{2}t + v(t_1 - t). \quad (5 \text{ б.})$$

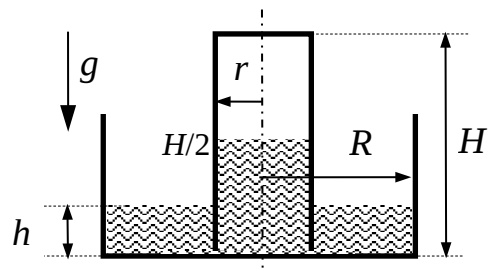
Аналогично,

$$s_2 = \frac{v}{2}t + v(t_2 - t). \quad (3 \text{ б.})$$

Поделим одно из этих уравнений на второе и, сократив v , найдём

$$\text{ответ: } t = 2 \frac{s_1 t_2 - s_2 t_1}{s_1 - s_2}. \quad (2 \text{ б.})$$

2. Перевернутый тонкостенный цилиндрический стакан стоит в цилиндрической чаше с водой. Дно чаши шероховатое, что обеспечивает свободное подтекание воды в стакан. Уровень воды в стакане — $\frac{1}{2}$ его высоты H , а уровень воды в чаше h . Радиус стакана r , радиус чаши R , плотность воды ρ , давление воздуха вне стакана P . Каким нужно сделать давление воздуха вне стакана, чтобы он начал выходить из стакана? Ускорение свободного падения g . Температура постоянна.



Решение.

Запишем равенство давлений на дне чаши внутри и снаружи стакана:

$$P_1 + \rho g \frac{H}{2} = P + \rho g h, \quad (1) \quad (2.6.)$$

где P_1 — начальное давление в стакане. Воздух начнёт выходить из стакана, когда в нём не останется воды и воздух займёт весь стакан, то есть объём воздуха увеличится вдвое. По закону Бойля — Мариотта, справедливому при постоянной температуре, это означает, что давление в этом состоянии вдвое меньше начального:

$$P_2 = \frac{P_1}{2}. \quad (2) \quad (2.6.)$$

Равенство давлений в чаше и стакане на нулевой высоте (у дна чаши) в этом состоянии выражается равенством:

$$P_2 = P' + \rho g h_2, \quad (3) \quad (2.6.)$$

где P' — искомое давление воздуха вне стакана, а h_2 — высота жидкости в чаше, которую можно найти из равенства объёмов жидкости в двух состояниях:

$$\pi r^2 \frac{H}{2} + \pi (R^2 - r^2) h = \pi (R^2 - r^2) h_2. \quad (4) \quad (2.6.)$$

Подставим в (2) P_1 из (1) и P_2 из (3). После этого, выразив h_2 из (4) и подставив в получившееся равенство, найдём

$$\text{ответ: } P' = \frac{P}{2} - \frac{\rho g}{2} \left(h + \frac{H}{2} \frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2} \right). \quad (2.6.)$$

Поскольку P' должно быть положительным, отрицательное значение полученного выражения означает, что воздух не выйдет из стакана ни при каких давлениях воздуха вне стакана.

3. На шероховатом столе лежат две одинаковые монеты. Первой монете сообщили некоторую скорость, и она начала скользить по столу. После неупругого центрального столкновения с неподвижной второй монетой, первая монета прошла путь до остановки l_1 , а вторая — l_2 . Определите, какая энергия выделилась при ударе в виде тепла, если известно, что кинетическая энергия первой монеты непосредственно перед ударом равнялась E_0 .

Решение.

По закону сохранения энергии,

$$E_0 = E_1 + E_2 + Q, \quad (1) \quad (2 \text{ б.})$$

где E_1, E_2 — кинетические энергии монет сразу после столкновения, а Q — искомая энергия, выделившаяся в виде тепла. Под действием силы трения $F_{\text{тр}}$ (одинаковой для обеих монет) монеты останавливаются, поэтому работа силы трения $F_{\text{тр}} l_{1,2}$ равна начальной кинетической энергии: $E_{1,2} = F_{\text{тр}} l_{1,2}$. Отсюда следует, что

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{l_1}{l_2}. \quad (2) \quad (3 \text{ б.})$$

Выразив импульс через энергию по формуле $p = \sqrt{2mE}$ (где m — масса), запишем закон сохранения импульса при ударе: $\sqrt{2mE_0} = \sqrt{2mE_1} + \sqrt{2mE_2}$ (импульс первого тела не может быть отрицательным, так как это соответствовало бы $E_2 > E_0$, что противоречит закону сохранения энергии). Сократив $\sqrt{2m}$, перепишем его в виде:

$$\sqrt{E_0} = \sqrt{E_1} + \sqrt{E_2}. \quad (3) \quad (3 \text{ б.})$$

Выразив E_2 из (2) и подставив в (3), найдём

$$E_1 = \frac{l_1}{(\sqrt{l_1} + \sqrt{l_2})^2} E_0. \quad (4)$$

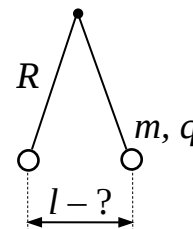
Аналогично,

$$E_2 = \frac{l_2}{(\sqrt{l_1} + \sqrt{l_2})^2} E_0. \quad (5)$$

Подставив (4) и (5) в (1), найдём

$$\text{ответ: } Q = \frac{2\sqrt{l_1 l_2}}{(\sqrt{l_1} + \sqrt{l_2})^2} E_0 \quad (2 \text{ б.})$$

4. Два маленьких шарика одинаковой массы m с одинаковыми зарядами q привязаны нерастяжимыми нитями одинаковой длины R к одной неподвижной точке. На какое расстояние нужно сблизить шарики, чтобы при их разлете нить порвалась, если она выдерживает силу натяжения T ? Силой тяжести и влиянием воздуха пренебречь.



Решение.

На каждый из шариков в процессе движения действуют сила натяжения нити T_n , направленная вдоль нити, и кулоновская сила $F_q = kq^2 / r^2$, направленная горизонтально (r — расстояние между шариками). Запишем 2-й закон Ньютона для одного из шариков в проекции на ось, направленную вдоль нити, заметив, что центростремительное ускорение, направленное вдоль этой оси, равно v^2 / R (v — скорость шарика), а синус угла между нитью и вертикалью равен $r/2R$:

$$\frac{mv^2}{R} = T_n - \frac{kq^2}{r^2} \frac{r}{2R}. \quad (1) \quad (3 \text{ б.})$$

При ускорении шариков часть кулоновской энергии их взаимодействия переходит в кинетическую. Запишем соответствующий закон сохранения энергии:

$$2 \frac{mv^2}{2} = \frac{kq^2}{l} - \frac{kq^2}{r}. \quad (2) \quad (2 \text{ б.})$$

Выразив mv^2 из (2) и подставив в (1), получим:

$$T_n = \frac{kq^2}{R^2} \left(\frac{R}{l} - \frac{1}{2} \frac{R}{r} \right). \quad (3)$$

Отсюда видно, что при заданном l сила натяжения принимает максимальное значение в крайнем положении шариков при

$$r = 2R \quad (3 \text{ б.})$$

Чтобы нить порвалась, максимальное значение T_n должно быть больше или равно T . Чтобы найти минимальное l , при котором это произойдет, подставим в (3) $r = 2R$, $T_n = T$, и выразив l , получим

$$\text{ответ: } l = \frac{1}{\frac{TR^2}{kq^2} + \frac{1}{4}} R \quad (2 \text{ б.})$$

Примечание. Если $T < kq^2 / (2R)^2$ (что соответствует $l > 2R$ в получившемся выражении), то есть если предельно допустимое натяжение нити меньше, чем кулоновская сила в крайнем положении, то нить порвётся при любых l .